ISSN 1392-1134
Žemės ūkio inžinerija, Mokslo darbai, 2013, 45(3), 59–67 p.
Agricultural Engineering, Research Papers, 2013, Vol. 45, No 3, 59–67 p.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ НАИМЕНЬШЕГО КВАЗИПЕРИОДА В ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЕ

INVESTIGATION OF A WAVES WITH MINIMUM QUASI-PERIOD AT DOUBLE PERIODIC PLATE

Анастасия Куценко

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины,
E-mail: ananas75@meta.ua

Механических системы периодической структуры обладают свойством пропускать волны только определенных частотных диапазонов, так называемых “окон прозрачности”, которое широко используется в технике при проектировании систем конструктивной виброзащиты, зеркал адаптивной оптики и т. п. Большинство решении подобных задач используются численные методы, например, метод конечных элементов.

Рассматривается процесс распространения гармонических волн в бесконечной пластине, закрепленной двумя взаимно ортогональными системами равноотстоящих линейных шарниров. Предполагается, что волна распространяется в направлении, ортогональном к диагонали элементарного периода.

Предложен метод исследования распространения волн в двоякопериодической пластине, который основан на использовании метода граничных элементов. С помощью данного метода были найдены „окна прозрачности” для волны, которая распространяется в направлении перпендикулярном диагонали элементарного периода системы. При соответствующей доработке приведенная методика может быть распространена на двоякопериодические системы других типов.

Пластина, периодическая структура, „окна прозрачности”, теория Флоке.

Введение

Развитие техники требует разработки новых методов устранения нежелательных вибраций механизмов и элементов конструкций, поэтому исследование колебаний механических систем периодической структуры кроме теоретического значения имеет и практическую ценность.

Упомянутые системы периодической структуры обладают свойством пропускать волны только определенных частотных диапазонов, так называемых “окон прозрачности”, которое широко используется в технике при проектировании систем конструктивной виброзащиты, зеркал адаптивной оптики и т. п.

Состояние вопроса

Большинство исследованных на данный предмет систем являются одномерными или квазиодномерными [1, 3, 6, 7]. Существует немного работ [2, 4, 5, 8], в которых рассматривают задачу в двумерной и трехмерной постановках. Как правило, при решении подобных задач используются численные методы, например, метод конечных элементов [2, 4, 5, 6, 8]. Поэтому рассмотрение процесса распространения гармонических волн в двоякопериодических механических системах на основе полуаналитического метода, как метод граничных элементов, представляется актуальной проблемой.

В данной работе рассматривается процесс распространения гармонических волн в бесконечной пластине, закрепленной двумя взаимно ортогональными системами равноотстоящих линейных шарниров (рис. 1). Расстояние между соседними шарнирами одной системы равно a, а между соседними шарнирами другой системы – b. Предполагается, что волна распространяется в направлении, ортогональном к диагонали элементарного периода AB (рис. 2).

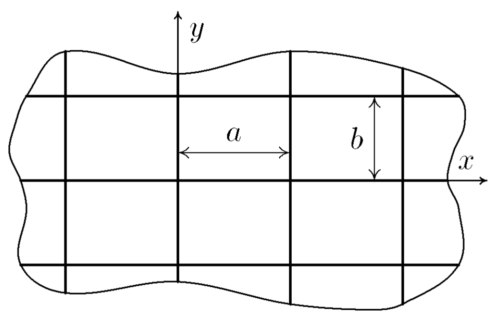

Рис. 1. Двоякопериодическая шарнирно закрепленная пластина
Fig. 1. Simple supported double periodic plate

Цель исследований

Для решения сформулированной в начале статьи проблемы, автором была поставлена цель разработать и апробировать метод исследования распространения волн в двоякопериодической пластине, который основан на использовании метода граничных элементов. С помощью данного метода найти „окна прозрачности” для волны, которая распространяется в направлении перпендикулярном диагонали элементарного периода системы.

Методика решения

Большинство исследований, посвященных исследованию процесса распространения волн в периодических структурах, основаны на теории Флоке [9]. Согласно этой теории при гармоническом возбуждении все кинематические и динамические характеристики в подобных точках любых двух соседних периодов системы отличаются в S раз. Параметр S, который принято называть мультипликатором, в общем случае является комплексной величиной: $S = |S| e^{i \arg S}$. Модуль мультипликатора указывает на степень убывания амплитуды волны от периода к периоду, а аргумент – на сдвиг фазы. Очевидно, что “окнам прозрачности”, нахождение которых составляет основную цель подобных исследований, соответствует $|S| = 1$.

$$w_i = 0, \quad i = \overline{1, 2N}; \tag{1}$$

– условие квазипериодического продолжения

$$\begin{array}{lll} \vartheta_{i+N+N_2} = -S\vartheta_i, & M_{i+N+N_2} = SM_i, & i = \overline{1, N_1}, \\ \vartheta_{i+N_2} = -S\vartheta_i, & M_{i+N_2} = -SM_i, & i = \overline{N_1 + 1, N}. \end{array} \tag{2}$$

В условиях (1), (2) w_i, ϑ_i, M_i – значение амплитудных функций прогиба, угла наклона нормали и изгибающего момента на i-том граничном элементе.

Согласно к основным положениям прямого метода граничных элементов для решения задачи о стационарных колебаниях пластин фундаментальное решение уравнения стационарных колебаний пластин должно удовлетворять следующее уравнение:

$$\Delta\Delta w^*(x, y) - p^4 w^*(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D}. \tag{3}$$

Для его нахождения используют преобразование Фурье:

$$W^*(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} w^*(x, y) dxdy. \tag{4}$$

Согласно наиболее распространенному варианту метода граничных элементов граница **Г** разбивается на отдельные части, которые называются граничными элементами (рис. 2). На каждом граничном элементе она аппроксимируется некоторой полиномной кривой. Вместе с границей неизвестные функции тоже аппроксимируются на каждом элементе некоторыми полиномами. Эти две аппроксимации не есть жестко связанными одна с другой, поэтому методы граничных элементов разделяют за сипенью гладкости границы и за степенью гладкости неизвестных функций.

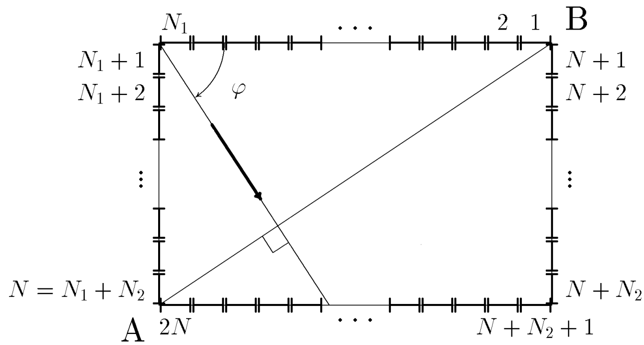

Рис. 2. Схема разбития границы периода пластины на граничные элементы

Fig. 2. The scheme of division of the period boundary of a plate on boundary elements

В данном случае для численной реализации были выбраны линейные граничные элементы, на которых неизвестные функции заменялись неизвестными постоянными, которые соответствуют и значениям в средних точках элементов. В следствии такой дискретизации граничные интегральные уравнения сводятся к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$w(\vec{x}_i)=\sum_{j=1}^{N}\left[A_{ij}w(\vec{x}_j)+B_{ij}\theta_n(\vec{x}_j)+C_{ij}M_n(\vec{x}_j)+D_{ij}V_n(\vec{x}_j)\right], \tag{5}$$

$$\theta_n(\vec{x}_i)=\sum_{j=1}^{N}\left[E_{ij}w(\vec{x}_j)+F_{ij}\theta_n(\vec{x}_j)+G_{ij}M_n(\vec{x}_j)+H_{ij}V_n(\vec{x}_j)\right],$$

$i=1,2,\ldots,N$,

где N – количество граничных элементов.

$$A_{ij}=-\int_{\vec{x}\in\Gamma_j}V_n^*(\vec{x},\vec{x}_i)d\vec{x}\,, \qquad B_{ij}=-\int_{\vec{x}\in\Gamma_j}M_n^*(\vec{x},\vec{x}_i)d\vec{x}\,,$$

$$C_{ij}=\int_{\vec{x}\in\Gamma_j}\theta_n^*(\vec{x},\vec{x}_i)d\vec{x}\,, \qquad D_{ij}=\int_{\vec{x}\in\Gamma_j}w^*(\vec{x},\vec{x}_i)d\vec{x}\,,$$

$$E_{ij}=-\int_{\vec{x}\in\Gamma_j}\frac{\partial V_n^*(\vec{x},\vec{x}_i)}{\partial\vec{n}_\xi}d\vec{x}\,, \qquad F_{ij}=-\int_{\vec{x}\in\Gamma_j}\frac{\partial M_n^*(\vec{x},\vec{x}_i)}{\partial\vec{n}_\xi}d\vec{x}\,, \tag{6}$$

$$G_{ij}=\int_{\vec{x}\in\Gamma_j}\frac{\partial\theta_n^*(\vec{x},\vec{x}_i)}{\partial\vec{n}_\xi}d\vec{x}\,,\qquad D_{ij}=\int_{\vec{x}\in\Gamma_j}\frac{\partial w^*(\vec{x},\vec{x}_i)}{\partial\vec{n}_\xi}d\vec{x}\,,$$

- коэффициенты влияния j - го элемента на прогиб и угол наклона i - го элемента.

После громоздких, но очевидных преобразований находятся выражения для недиагональных $(i\neq j)$ коэффициентов:

$$A_{ij}=\frac{p}{4\pi}x_i^j\int_{-a_j}^{a_j}\left(Z_3(pr)-4\frac{Z_2(pr)}{pr}\right)\frac{dy^j}{r}-\frac{1-\nu}{4\pi}x_i^jZ_2(pr)\frac{y^j-y_i^j}{r^2}\Bigg|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j}\,,$$

$$B_{ij}=\frac{1}{4\pi}\int_{-a_j}^{a_j}\frac{Z_2(pr)}{r^2}\left(\left(x_i^j\right)^2+\nu\left(y^j-y_i^j\right)^2\right)dy^j+\frac{(1+\nu)D}{x_i^j}C_{ij}\,,$$

$$C_{ij}=-\frac{x_i^j}{4\pi pD}\int_{-a_j}^{a_j}\frac{Z_1(pr)}{r}dy^j\,,$$

$$D_{ij}=\frac{1}{4\pi p^2D}\int_{-a_j}^{a_j}Z_0(pr)dy^j\,,$$

$$\begin{aligned}E_{ij}=\frac{p}{4\pi}\Bigg[n_1\Bigg\{&p\int_{-a_j}^{a_j}\left[Z_4(pr)\frac{\left(x_i^j\right)^2}{r^2}-Z_3(pr)\frac{r^2+6\left(x_i^j\right)^2}{pr^3}+Z_2(pr)\frac{4}{p^2r^2}\right]dy^j-\\&-(1-\nu)\left[\left(Z_3(pr)\frac{\left(x_i^j\right)^2}{r^2}-\frac{Z_2(pr)}{pr}\right)\frac{y^j-y_i^j}{r}\right]\Bigg|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j}\Bigg\}+\\&+n_2\left\{\left[Z_3(pr)-4\frac{Z_2(pr)}{pr}+(1-\nu)\left(Z_3(pr)\left(\frac{y^j-y_i^j}{r}\right)^2-\frac{Z_2(pr)}{pr}\right)\right]\frac{x_i^j}{r}\right\}\Bigg|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j}\Bigg]\end{aligned}\qquad(7)$$

$$\begin{aligned}F_{ij}=\frac{1}{4\pi}\Bigg[&pn_1\int_{-a_j}^{a_j}\left(Z_3(pr)\frac{\left(x_i^j\right)^2+\nu\left(y^j-y_i^j\right)^2}{r^2}-(3+\nu)\frac{Z_2(pr)}{pr}\right)\frac{x_i^j}{r}dy^j+\\&+n_2\left(\frac{Z_2(pr)}{r^2}\left(\left(x_i^j\right)^2+\nu\left(y^j-y_i^j\right)^2\right)-(1-\nu)\frac{Z_1(pr)}{pr}\right)\Bigg|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j}\Bigg],\end{aligned}$$

$$G_{ij} = -\frac{n_1}{4\pi D}\int_{-a_j}^{a_j}\left(Z_2(pr)\frac{\left(x_i^j\right)^2}{r^2} - \frac{Z_1(pr)}{pr}\right)dy^j - \frac{n_2}{4\pi p D}Z_1(pr)\frac{x_i^j}{r}\Bigg|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j},$$

$$H_{ij} = -C_{ij}n_1 + \frac{Z_0(pr)}{4\pi p^2 D}n_2\Bigg|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j},$$

где a_j - половина длинны j - го граничного элемента,

$$Z_n(t) = \frac{\pi i}{2}H_n^{(1)} - K_n(t), \qquad r = \sqrt{\left(y^j - y_i^j\right)^2 + \left(x_i^j\right)^2}.$$

Пять диагональных коэффициентов получаем сразу с (7), если положить:

$$x_i^j = y_i^j = 0, \qquad n_1 = 1, \qquad n_2 = 0,$$

тогда:

$$B_{jj} = -\frac{1}{2\pi p}\left[\frac{\pi i}{2}I_H(pa_j) + I_K(pa_j) - (1-\nu)Z_1(pa_j)\right],$$

$$C_{jj} = 0,$$

$$D_{jj} = -\frac{1}{2\pi p^3 D}\left[\frac{\pi i}{2}I_H(pa_j) - I_K(pa_j)\right], \tag{8}$$

$$G_{jj} = -\frac{1}{2\pi p D}\left[\frac{\pi i}{2}I_H(pa_j) + I_K(pa_j) - Z_1(pa_j)\right],$$

$$H_{jj} = 0,$$

где

$$I_H(x) = \int_0^x H_0^{(1)}(x)dx, \qquad I_K(x) = \int_0^x K_0(x)dx.$$

Другие три коэффициенты выражаются через сингулярные интегралы, которые нужно понимать как главное значение по Коши. Конечный результат такого асимптотического анализа модна подать в следующем виде:

$$A_{jj} = F_{jj} = 1/2,$$

$$E_{jj} = \frac{p}{2\pi}\left[\int_0^{pa_j}Z_0(x)dx\frac{\pi i}{2} + Z_3(pa_j) - (3+\nu)\frac{Z_2(pr)}{pa_j}\right]. \tag{9}$$

Выражения (7) – (9) вместе с системой линейных алгебраических уравнений (5) составляют основу численной схемы решения граничных задач теории стационарных колебаний пластин. Значения прогиба у внутренних точках пластины после решения системы линейных алгебраических уравнений получаются с соответственным образом дискретизированных соотношения:

$$w(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} \left(-V^*(\vec{x},\vec{\xi})w(\vec{x}) - M^*(\vec{x},\vec{\xi})\theta(\vec{x}) + \theta^*(\vec{x},\vec{\xi})M(\vec{x}) + w^*(\vec{x},\vec{\xi})V(\vec{x}) \right) d\Gamma(\vec{x})$$

Основные результаты и обсуждения

Численная схема методу граничных элементов для рассматриваемой задачи была реализована с помощью языка программирования Pascal.

Решения задачи представлены на рисунке 3, где в виде затемненных участков изображены “окна прозрачности” волны, распространяющейся в направлении, ортогональном к диагонали элементарного периода пластины. Чем более темным цветом изображена некоторая точка диаграммы, тем большему количеству “окон прозрачности” она соответствует.

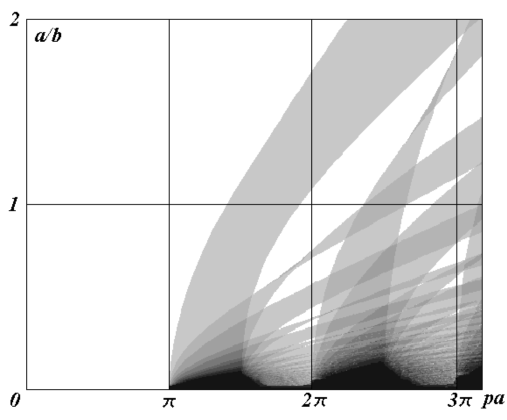

Рис. 3. “Окна прозрачности” двоякопериодической пластины
Fig. 3. Pass-band of double periodic plate

Видно, что все окна условно можно разделить на два типа: с четной и нечетной разницей номеров мод вдоль осей x и y. Границы окон первого типа совпадают с кривыми $S = \pm 1$, в то время как окна второго типа находятся между ними, имеют тонкий перешеек при $a = b$ и, по существу, состоят из двух окон.

Выводы

1. Для увеличения эффективности использования метода граничных элементов к задачам о распространении волн в двоякопериодических системах, используя метод функций влияния, был разработан подход, который позволяет свести решение данной задачи к общей алгебраической проблеме на собственные числа.

2. На его основе были построены “окна прозрачности” для так называемого „диагонального” направления распространения волны в бесконечной пластине, которая закреплена двумя взаимно ортогональными системами осевых шарниров. Оказалось, что все они разделены на два типа в зависимости от того, совпадают парность мод волн, которым они соответствуют, в направлении систем шарниров или нет.

3. Полученные результаты для данной периодических закрепленной пластины показали, что подобные механические системы могут быть использованы в сельскохозяйственном машиностроении. Они могут играть роль элементов виброзащиты в виде своеобразных гасителей нежелательных колебаний. Это в свою очередь обеспечит безопасные и комфортные условия для работников экологически чистого сельскохозяйственного производства.

Список литературы

1. Banerjee J.R., Su H. Development of a dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of spinning beams // Computers and Structures. 2004. – Vol. 82, P. 2189–2197.
2. Duhamel D., Mace B.R., Brennan M.J. Finite element analysis of the vibration of waveguides and periodic structures // J. Sound and Vibr. – 2006. – Vol. 294, N5, P. 205–220.
3. Langley R.S. The response of two-dimensional periodic structures to point harmonic forcing // J. Sound and Vibr. – 1996. – Vol. 197, N4, P. 447–469.
4. Lee J., Thompson D.J. Dynamic stiffness formulation, free vibration and wave motion of helical springs // J. Sound and Vibr. – 2001. – Vol. 239, P. 297–320.
5. Mace B.R., Duhamel D., Brennan M.J., Hinke L. Wavenumber prediction using finite element analysis//Eleventh International Congress on Sound and Vibration, St. Peterburg. – 2004.
6. Banerjee J.R. Development of an exact dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of a twisted Timoshenko beams // J. Sound and Vibr. – 2004. – Vol. 270, P. 379–401.
7. Mead D.J. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964-1995 // J. Sound and Vibr. – 1996. – Vol. 190, N 3, P. 495–524.
8. Mencik J.M., Ichchou M.N. Wave finite elements in guided elastodynamics with internal fluid // Inter. J. of Sol. And Structures. – 2007 – Vol. 44, P. 2148 – 2167.

9. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1959. – 457 с.
10. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

Anastasia Kutsenko

INVESTIGATION OF A WAVES WITH MINIMUM QUASI-PERIOD AT DOUBLE PERIODIC PLATE

Abstract

The mechanical systems of periodical structure are passed through a wave by certain ranges of frequency. There ranges of frequency are called pass-bends. This is feature of periodical mechanical system have been invoked to designee of vibration construction. Many solutions of such problems by numerical methods are drawn. As an example, the method of finite elements.

A problem of bending waves propagation through a plate with two mutually perpendicular systems of hinges is considered. Wave propagates in the orthogonal to the period diagonal direction is perceived.

The method of the investigation of wave propagation in double periodic plates, which based on the boundary elements method, is developed. With the help of this method the pass-bands of the wave, which propagates in the orthogonal to the minimum period diagonal direction, are found. Under corresponding modification it can be applied in the case of arbitrary double periodic systems.

Plate, periodic structure, pass-bands, Floquet's principle.

Anastasia Kutsenko

BANGOS SU MAŽIAUSIU KVAZIPERIODU SKLIDIMO DVIGUBO PERIODIŠKUMO PLOKŠTELĖJE TYRIMAS

Santrauka

Periodinės struktūros mechaninės sistemos gali būti tiriamos per jas leidžiant tam tikros dažninės srities bangas. Ši dažninė sritis yra vadinama neslopstančia, o pati periodinių mechaninių sistemų savybė dažnai taikoma vibraciniam sistemų tyrimui. Egzistuoja daugybė šių problemų sprendimo variantų skaitiniais metodais, iš kurių dažniausiai sutinkamas yra baigtinių elementų metodas.

Straipsnyje analizuojama neslopstančių bangų sklidimo plokštele problematika esant dviem statmenoms šarnyrų sistemoms. Nustatyta, jog banga sklinda tiek statmenoje koordinačių sistemoje tiek įstrižai. Ribinių būvių metodu tirtas neslopstančios srities bangų sklidimas minėtomis kryptimis. Atlikus atitinkamus pakeitimus šis būdas gali būti taikomas dvigubų periodinių sistemų tyrimui.

Plokštelė, periodinė struktūra, neslopstanti sritis, Flouquet principas.